БЕКБОЛАТ БАЯН

АНАЛИЗ ДАНКЛА И ПРИМЕНЕНИЕ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. В данной диссертации мы исследуем псевдодифференциальные операторы, порожденные операторами Данкла, а также рассматриваем обратные задачи по восстановлению правой части для параболических и псевдопараболических уравнений.

Псевдодифференциальные операторы, порожденные операторами Данкла впервые были изучены A. Dachraoui в 2001 году и были получены несколько результатов ограниченности для этого оператора в классическом пространстве Шварца и пространствах типа Соболева. В следующих работах были изучены L^2 и L^p-ограниченность этого оператора, но не было изучено ограниченность амплитудных, транспонированных и сопряженных операторов в пространствах Шварца.

В данной диссертации мы доказали ограниченность псевдодифференциальных, амплитудных, транспонированных и сопряженных операторов с классическими символами, порожденных операторами Данкла, в пространствах Шварца.

Также были изучены обратные задачи по восстановлению правой части для параболических и псевдопараболических задач с дробными производными Капута и Гильфера по времени, которые до этого не рассматривались. Было показано корректно разрешимости этих задач в смысле Адамара и были получены явные виды решений этих задач.

Цель диссертационной работы развитие теории псевдодифференциальных операторов, порожденные операторами Данкла и изучение обратных задач по восстановлению правой части для параболических и псевдопараболических задач.

Для достижения цели диссертационной работы рассмотрены следующие основные задачи исследования:

-Доказать, что псевдодифференциальные операторы с классическим символом, порожденные с операторами Данкла, является линейным непрерывным оператором определенных в пространствах Шварца;

-Доказать, что амплитудные операторы, порожденные с операторами Данкла, является линейным непрерывным оператором определенных в пространствах Шварца;

-Доказать, что транспонированные операторы, порожденные с операторами Данкла, является линейным непрерывным оператором определенных в пространствах Шварца;

-Доказать, что сопряженные операторы, порожденные с операторами Данкла, является линейным непрерывным оператором определенных в пространствах Шварца;

-Определить ядро псевдодифференциальных операторов, порожденные операторами Данкла, и показать что является гладкой функцией;

-Показать корректно разрешимость обратной задачи по определению правой части для уравнении теплопроводности, порожденного с операторами Данкла, с дробным производным Капуто по времени;

-Показать корректно разрешимость обратной задачи по определению правой части для псевдопараболической задачи, порожденные с операторами Данкла, с дробным производным Капуто по времени;

-Показать корректно разрешимость обратной задачи по определению правой части для уравнений теплопроводности, порожденного с операторами Данкла, с дробным производным Гильфера по времени.

Объект исследования операторы Данкла и псевдодифференциальные операторы, порожденные операторами Данкла.

Методы научного исследования. В диссертации используются методы теории псевдодифференциальных операторов, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории функций и теории специальных функций.

Научная новизна работы. Задачи, рассмотренные в настоящей диссертации, являются новыми.

В диссертации как приложение анализа Данкла приведены следующие новые задачи:

Мы рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\gamma}_{0^+,t}u(t,x) - D^2_{\alpha,x}u(t,x) + mu(t,x) = f(x), & (t,x) \in Q_T, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(T,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где $Q_T := \{(t,x) :\ 0 < t < T < +\infty,\ x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{D}^{\gamma}_{0^+,t}$ – дробный производный Капуто, $D^2_{\alpha,x}$ – Лапласиан Данкла, φ и ψ – подходящие известные функции. В диссертации мы показали, что вышеуказанная задача имеет единственное пара решений (u,f) в пространствах типа Соболева и показали явный вид решения. Потом мы рассмотрим следующую задачу как продолжение вышеуказанной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\gamma}_{0^+,t}\left(u(t,x) - aD^2_{\alpha,x}u(t,x)\right) - D^2_{\alpha,x}u(t,x) + mu(t,x) = f(x), (t,x) \in Q_T, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(T,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где a – положительное число, если a равен нулю то мы получим первую задачу. Здесь мы показали что задача имеет единственное пара решений (u, f) в пространствах типа Соболева и нашли явный вид решения. В конце мы рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+,t}^{(\gamma_1,\gamma_2)s} u(t,x) - aD_{\alpha,x}^2 u(t,x) = p(t)f(x), & (t,x) \in Q_T, \\ \lim\limits_{t\to 0+} I_{0^+,t}^{1-\eta} u(t,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(T,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

где $\mathcal{D}_{0^+,t}^{(\gamma_1,\gamma_2)s}$ – оператор Гильфера, $I_{0^+,t}^{1-\eta}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля и p – известная функция. Здесь тоже мы показали что задача имеет единственное пара решений (u, f) в пространствах типа Соболева и нашли явни вид решения.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Исследования по теме носят, в основном, теоретический и фундаментальный характер. Их научная значимость обусловлена именно глубоким уровнем фундаментальности получаемых результатов.

Публикации. Опубликовано 7 работ (2 в журналах, индексируемых Scopus, и 4 в журнале, рекомендованном Комитет по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан).

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 B. Bekbolat, D. Serikbaev, N. Tokmagambetov. Direct and inverse problems for time-fractional heat equation generated by Dunkl operator // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, V. 31, № 3, 393–408, 2023. Indexed by Scopus and Web of Science, Scopus SJR 2022: 0.428 (Q2), CiteScore 2022: 2.4, Web of Science Impact factor: 1(Q2)

2 B. Bekbolat, A. Kassymov, N. Tokmagambetov. Blow-up of solutions of nonlinear heat equation with hypoelliptic operators on graded Lie groups // Complex Analysis and Operator Theory. V. 13, № 7, 3347-3357, 2019. Indexed by Scopus and Web of Science, Scopus SJR 2018: 0.459 (Q3), CiteScore 2019: 1.3, Web of Science Impact factor: 0.8(Q3)

КОКНВО

1 B. Bekbolat, N. Tokmagambetov. Well-posedness results for the wave equation generated by the Bessel operator // Bulletin of the Karaganda University, V. 101, № 1, 11-16, 2021.

2 B. Bekbolat, D. B. Nurakhmetov, N. Tokmagambetov, G. H. Aimal Rasa. On the minimality of systems of root functions of the Laplace operator in the punctured domain // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan, Physico-mathematical series. V. 4, № 326, 92-109, 2019.

3 B. Bekbolat, B. Kanguzhin, N. Tokmagambetov. To the question of a multipoint mixed boundary value problem for a wave equation // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan, Physico-mathematical series. V. 4, № 326, 76-82, 2019.

4 B. Bekbolat, N. Tokmagambetov. On a boundedness result of non-toroidal pseudo differential operators // International Journal of Mathematics and Physics. V. 9, № 2, P. 50-55, 2018.

Отечественное издание

1 B. Bekbolat, N. Tokmagambetov. Cauchy problem for the Jacobi fractional heat equation // Kazakh Mathematical Journal, V. 21, № 3, 16-26, 2021.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из титульного листа, содержания, введения, три раздела, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 109 страниц с 99 ссылками на литературы.

Основное содержание диссертации. Введение содержит актуальность темы исследования, цели и задачи, основные положения для защиты диссертации, объект и предмет исследования, методы исследования, новизну и теоретическую и практическую значимость исследования, связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами, апробация работы, публикации автора, объем и структура диссертации и содержание.

В первой главе мы собираем некоторые основные результаты анализа Данкла и дробного анализа. Мы определяем оператор Данкла D_α и Лапласиан Данкла D_α^2 на подходящих пространствах и рассматриваем свойства оператора Данкла. Мы определяем ядро Данкла $E_\alpha(x, y)$ как единственное решение задачи Коши, сгенерированное оператором Данкла. Затем мы получаем рядное и пуассоновское интегральное представления ядра Данкла. Мы доказываем, что ядро Данкла $E_\alpha(x, y)$ не имеет нулей для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Затем мы определяем преобразования Данкла и обратные преобразования Данкла и изучаем их свойства. После того, как мы определим преобразование Данкла для распределений докажем, что это непрерывное линейное преобразование. Кроме того, мы приводим ряды Тейлора, сгенерированные оператором Данкла, как часть анализа Данкла.

Во второй главе мы рассмотрим псевдодифференциальные операторы, порожденные с операторами Данкла. Некоторые результаты об ограниченности для этих операторов уже были известны в литературе. Мы определяем амплитудные, сопряженные и транспонирующие операторы и доказываем, что псевдодифференциальные, амплитудные, сопряженные и транспонирующие операторы являются линейными преобразованиями в пространствах Шварца. Мы также определяем псевдодифференциальные операторы для распределений и доказываем, что это непрерывное линейное преобразование. Затем мы изучаем свойства ядер распределения и свертки псевдодифференциальных операторов. В частности, мы доказываем лемму Шура. Мы получаем некоторые результаты об ограниченности для псевдодифференциальных операторов и композиции псевдодифференциальных операторов в пространстве $L(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ при определенных предположениях.

В последней главе мы изучаем обратные задачи по востонавлению правой части для уравнений теплопровдности и псевдопараболических уравнений с дробными дифференциальными операторами Капуто и операторами Гильфера. Для этих обратных задач мы доказываем результаты корректности в смысле Адамара. Сначала мы рассматриваем прямые задачи и устанавливаем существование и единственность решения. Затем мы рассматриваем обратные задачи и определяем пару решений в подходящих пространствах. Мы используем классический метод Фурье. После мы установим корректность задачи, что означает, что решение обратных задач зависит от входных данных непрерывно. Кроме того, мы рассмотрим несколько примеров, чтобы проиллюстрировать наш анализ.